ع

السنة الثالثة ثانوي

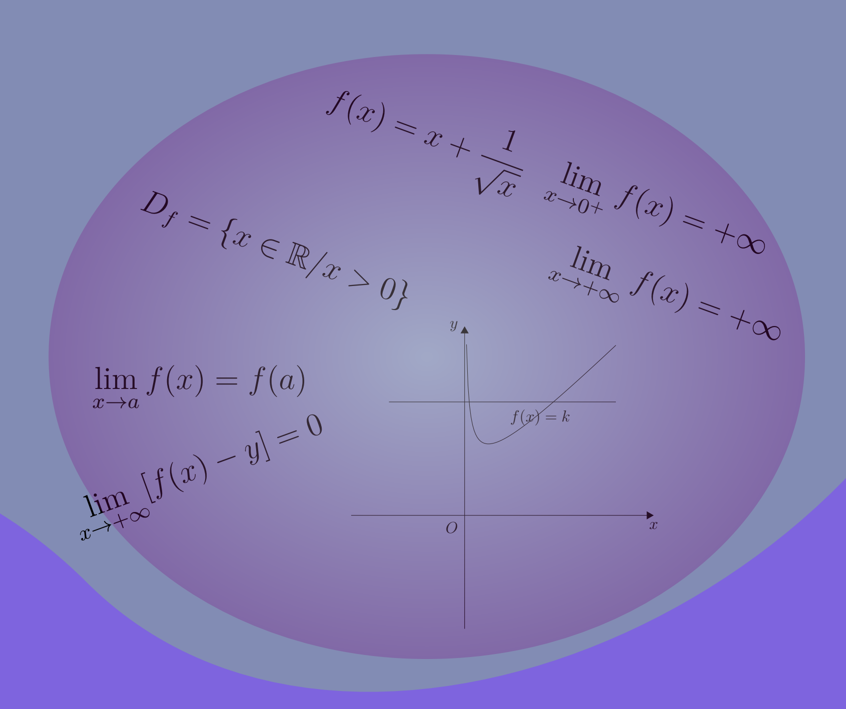
سلسلة إبسلون

الرياضيات

المحور الأول :

النهايات والإستمرارية

chettah.oussama77@gmail.com



إعداد : شطاح أسامة عبد المنعم

النهـايات والإسـتمـرارية

تـمـرين (01) :

أحسب النهايات التالية إن وجدت :

1. $\lim_{x\to+\infty} -2018x - x^3 + 2019x^2 + 2020$
2. $\lim_{x\to+\infty} x\left(5 - \frac{4}{(x-3)^2}\right)$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3+9x-1}{7x^2-5x+2}$
4. $\lim_{x\overset{>}{\to}5} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
5. $\lim_{x\overset{<}{\to}5} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
6. $\lim_{x\overset{>}{\to}5} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$
7. $\lim_{x\overset{<}{\to}5} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

تـمـرين (02) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{2}{x} & ; x > 0 \\ \frac{x^2+3x}{x+1} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

احسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1))$.

تـمـرين (03) :

أحسب نهايات الدوال الآتية عند أطراف مجال التعريفها :

1. $f_1(x) = \frac{2x^2+x+3}{-x^2+x+2}$.
2. $f_2(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.
3. $f_3(x) = \frac{-2x^3+4x+3}{x^2-4x+3}$.
4. $f_4(x) = \frac{2x^3-3x+1}{x^2-4x+4}$.
5. $f_5(x) = -3x+1-\frac{x}{(x-1)^2}$.
6. $f_6(x) = \frac{x^3+2x^2-3x-1}{x^2}$.
7. $f_7(x) = \frac{-2x^3+4x+3}{x-4x+3}$.
8. $f_8(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$
9. $f_9(x) = \frac{x^2+3}{|x-1|}$
10. $f_{10}(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

تـمـرين (04) :

من أجل تحديد النهاية عند 0^+ و عند $+\infty$ للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{\frac{6x+5}{x}}$

1)- عين الدالة g حيث : $f(x) = \sqrt{g(x)}$

2)-أحسب نهاية الدالة g عند 0^+ وعند $+\infty$

3)-استنتج نهاية الدالة f عند حدود مجال تعريفها

تـمـرين (05) :

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+4}}$

عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها ؟

تـمـرين (06) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1)- ما هي نهاية الدالة $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$

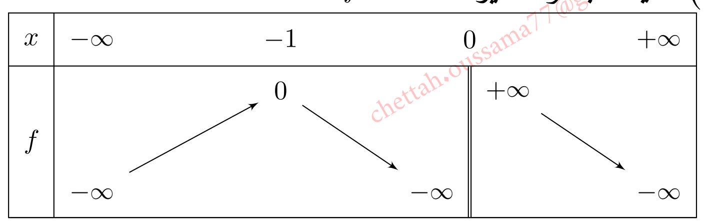
2)- أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

تـمـرين (07) :

1)- أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

1. $\lim_{x\to0} \cos(\pi-2x)$
2. $\lim_{x\to-\infty} (x^3-3x+2)^2$
3. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}$
4. $\lim_{x\to1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

2)- اليك جدول تغيرات الدالة f :



أوجد باستعمال هذا الجدول النهايات التالية :

$\lim_{x\to+\infty} f(-1+\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to-\infty} f(-1+\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$

$\lim_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x^2+1})$, $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)+3}$, $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{f(x)+3}$

$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)$

تـمـرين (08) :

f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1)- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$

2)- اثبت أنه من أجل كل $x > 0$, $f(x) = x(1-\frac{2}{\sqrt{x}})$

3)استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

[1] تذكير : حالات عدم التعيين : $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, 0×0,

تمرين (09) :

لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, 2\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(2x-1)}$$

1)- ماهي النهاية عند الدالة $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ ؟ هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند 2 ؟

2)- أثبت أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

3)- استنتج نهاية الدالة f عند 2

تمرين (10) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2 - x}$$

1)- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$

2)- اضرب و اقسم العبارة $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x}$ بالعبارة المرافقة $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}$

3)- أثبت أنه من أجل كل $x \leq 1$,

$$f(x) = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

4)- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (11) :

أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{x}$
2. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x$
7. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}$
11. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+x}-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+1}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1})$

تمرين (12) :

لتكن f الدالة المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x-1}$

1)- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ،

$$\frac{2x+1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x-1}{x-1}$$

2)استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

تمرين (13) :

1)- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x,

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$$

لتكن g الدالة المعرفة على$\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2-\cos(x)}$

2)- أدرس نهاية f عند $-\infty$

تمرين (14) :

1)- أحسب النهايات الآتية إن وجدت :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \frac{\sin(5x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2\cos x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)+1}{1+x}$

2)-أ)- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن :

$$1 \leq \frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

ب)- استنتج النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$$

تمرين (15) :

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$$

1)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)]$

2)- استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

3)- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4)- بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x-2)] = b$$

5)- استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) عند$-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

تمرين (16) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) يطلب تعين معادلتهما .

تمرين (17) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)- أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2)-برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) يطلب تعين معادلتهما .

4)- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ_1) و (Δ_2) .

تمـريـن (18) :

نعتبر الدالة f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

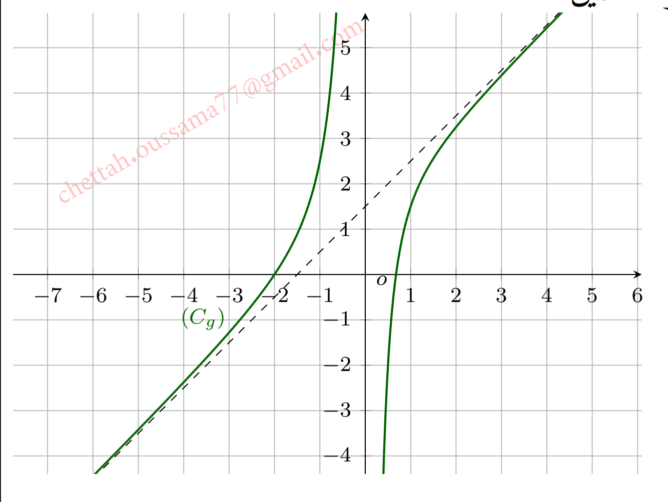
$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{2x^3+7x^2+10x+15}{x^2+2x+5}$$

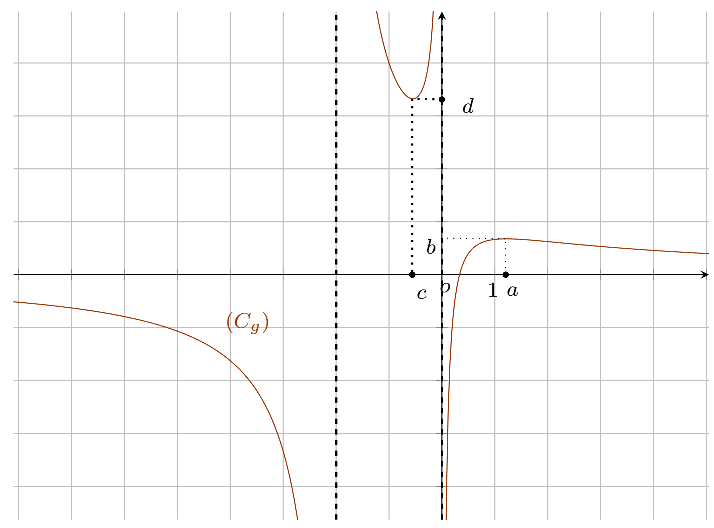
1) أثبت وجود مسقيم مقارب المائل للمنحنى للدالة g بجوار $+\infty$

2)- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

تمـريـن (19) :

f و g دالتان عدديتان تمسيلها البياني على الترتيب (C_f) و (C_g) -أنظر الشكلين -





1)- عين مجموعة تعريف كل من الدالة f و g

2)- عين نهايات الدوال f و g

3)- أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لكل المنحنين (C_g)و(C_f)

4)- شكل جدول تغيرات الدالتين f و g

تمـريـن (20) :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

بإستعمال جدول التغيرات المعطى عين :

1)- مجموعة تعريف الدالة f

2)- النهايات على أطراف مجال التعريف

3)- معادلة لكل مستقيم مقارب ل (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

4)- استنتج الوضع النسبي لهذه المستقيمات مع (C_f)

تمـريـن (21) :

x	$-\infty$	-5	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0 $-$ ‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$	$\searrow -\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	3	$\searrow 1$

بإستعمال جدول التغيرات المعطى عين :

1)- مجموعة تعريف الدالة f

2)-النهايات على أطراف مجال التعريف

3)- معادلة لكل مستقيم مقارب ل (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

تمـريـن (22) :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-2,3[$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & x \in [-2,0[\\ x & x \in [0,3[\end{cases}$$

1)- مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2)- هل الدالة f مستمرة على $]-2,3[$ ؟

3)- أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه

تمـريـن (23) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2,1[$ كما يلي :

$f(x) = x(x+E(x))$

حيث $E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح ل x

1)- عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[0,1[,\ [-1,0[,\ [-2,-1[$

2)- ارسم في المعلم م,م $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f.

3)- هل الدالة f مستمرة على $[-2,1[, [-2,0[, [-2,1[$

تمرين (24) :

أدرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) - $x_0 = 0;\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

2) - $x_0 = 0;\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

تمرين (25) :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x) = 2x + \dfrac{x^2-5x+6}{|x^2-9|-|x-3|}$

1) - حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,6[$ كما يلي :

$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 3 \\ \dfrac{41}{7} & x = 3 \\ f(x) & 3 < x < 6 \end{cases}$

- هل الدالة g مستمرة عند $x_0 = 3$؟ هل الدالة مستمرة على المجال $]0,6[$ ؟

تمرين (26) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$

-عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين (27) :

لتكن $E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح ل x

- أدرس إستمرارية الدالة f اعلى $\mathbb{Z}$ المعرفة كالآتي :

$f(x) = E(x) - [x - E(x)]^2$

تمرين (28) :

I)- برهن باستعمال نظرية القيم المتوسطة أن المعادلات تقبل حلا حقيقيا على الأقل في كل حالة من الحالات التالية :

1. $x^3 - 4x = -2,\quad x \in [-3,-2]$
2. $4x^3 + 3 = 0,\quad x \in [-1,0]$
3. $x^3 - 2x + 1 = 0,\quad x \in [-2,-1]$
4. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0,\quad x \in [1, \frac{3}{2}]$
5. $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2,\quad x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

II)- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 3x^3 - 2x - \dfrac{1}{4}$

1)- أحسب $f(-1), f(\frac{1}{2}), f(0), f(1)$.

2)- استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

تمرين (29) :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	5	↘	-3	↗	8

1)- عين عدد حلول المعادلات التالية محددا المجال الذي ينتمي إليه كل حل : $f(x) = 9, f(x) = 2, f(x) = 0$

تمرين (30) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1)- أدرس إتجاه تغير الدالة f .[2]

2)- برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.1\ ,\ 2.3[$.

3)- باستعمال طريقة التنصيف عين حصرا للعدد α سعته (طوله) 0.15 .

4)- أثبت أن : $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

تمرين (31) :

f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $]2,+\infty[$ كما يلي :

$f(x) = \sqrt{x}$، $g(x) = \dfrac{5}{x-2}$ و (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيين .

- بين أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة A فاصلتها x_0 حيث : $4 < x_0 < 5$

اصدار : 17/11/2020

مع تمنياتي لكم بالتوفيق : شطاح أسامة عبد المنعم

Email : chettah.oussama77@gmail.com

كتب بـ LaTeX

[2] ملاحظة : يمكن للتلميذ إستعمال الإشتقاق لدراسة اتجاه التغير كونه مدرج في دروس سنة ثانية